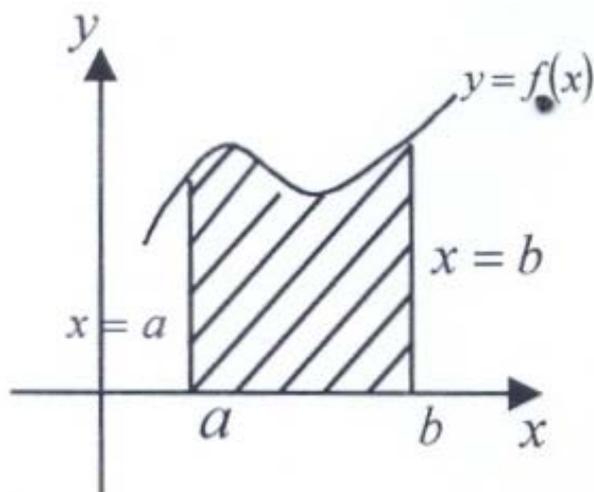


# Определённый интеграл

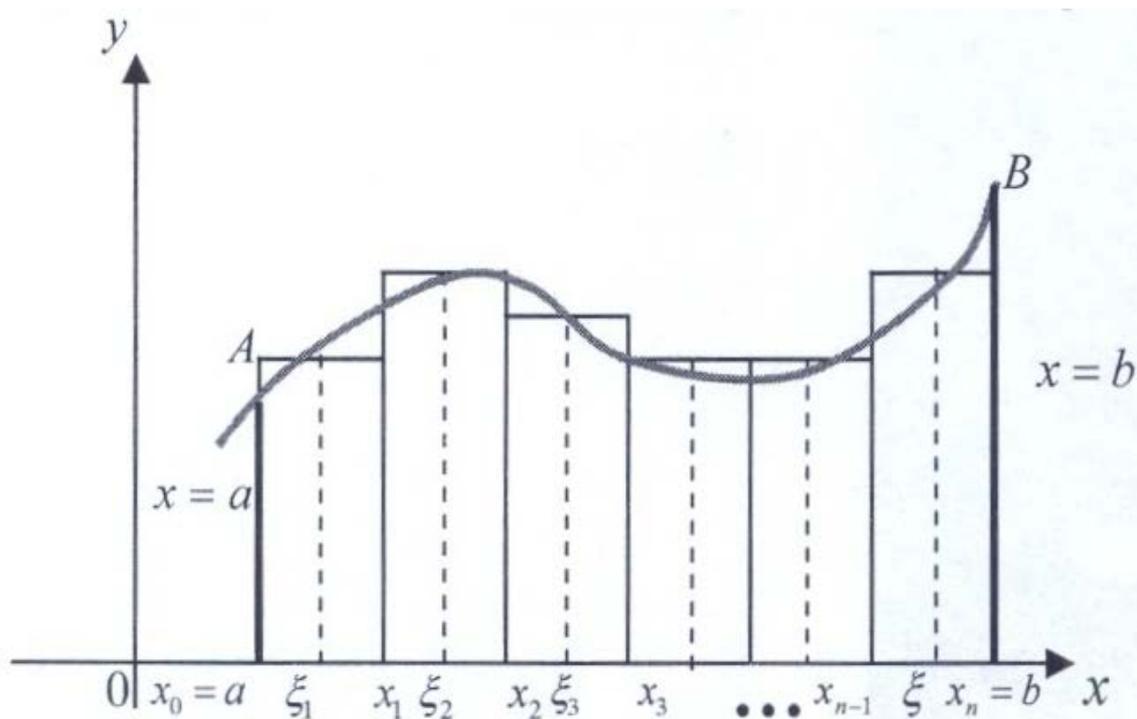
## §1 Задача, приводящая к понятию определенного интеграла (задача о площади криволинейной трапеции)

Пусть требуется вычислить площадь области  $S$ , ограниченной некоторой замкнутой кривой.

**Определение 1.** Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная частью кривой  $y = f(x)$ , отрезком  $[a; b]$  оси  $OX$  и двумя прямыми:  $x = a$  и  $x = b$  параллельными оси  $OY$ .



**Решим задачу о нахождении площади этой криволинейной трапеции.**



Разобьем отрезок  $[a; b]$  на « $n$ » частей точками  $a = x_0; x_1; x_2 \dots x_n = b$

Через каждую точку разбиения проведем прямые параллельные оси  $OY$  до пересечения с кривой.

Тогда площадь трапеции может быть представлена в виде суммы получившихся в результате указанного разбиения «малых» криволинейных трапеций:

$$S_{aABb} = S_1 + S_2 \dots S_n$$

Внутри каждого отрезка разбиения произвольным образом выберем точку. Для отрезка  $[x_{i-1}; x_i]$  эту точку обозначим  $\xi_i$ . Из этих точек проведем прямые параллельные оси  $OY$  до пересечения с кривой  $y = f(x)$ .

Ординаты точек пересечения равны соответственно  $f(\xi_i)$ . Каждую малую трапецию заменим прямоугольником с основанием  $\Delta x_i$  и высотой  $h = f(\xi_i)$ .

Полученную в результате указанных действий ступенчатую фигуру можно рассматривать как приближенное значение искомой площади криволинейной трапеции.

Площади прямоугольников, составляющих ступенчатую фигуру, вычисляются соответственно по **формулам:**

$$S_1 = f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1$$

$$S_2 = f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) = f(\xi_2) \cdot \Delta x_2$$

$$S_n = f(\xi_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) = f(\xi_n) \cdot \Delta x_n$$

Следовательно,

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \text{- площадь ступенчатой фигуры}$$

Отметим, что  $\sigma_n$  тем точнее дает приближенное значение площади криволинейной трапеции, чем больше «  $n$  ».

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - \text{площадь криволинейной трапеции.}$$

**Определенный интеграл зависит от пределов интегрирования  $a$ ,  $b$  и от вида подынтегральной функции  $f(x)$  и не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) d(u)$$

**С геометрической точки зрения определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции.**

**С физической точки зрения определенный интеграл равен работе силы, параллельной перемещению.**

## §2 Свойства определённого интеграла

**1. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:**

$$\int_a^b A \cdot f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned}\int_a^b A \cdot f(x) dx &= \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= A \cdot \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= A \cdot \int_a^b f(x) dx, \text{ ч.т.д.}\end{aligned}$$

**2. Интеграл алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен соответствующей алгебраической сумме интегралов слагаемых, т.е.**

$$\begin{aligned}\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)) dx &= \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx\end{aligned}$$

**3. Если отрезок  $[a; b]$  разбит на два отрезка  $[a; c]$  и**

**$[c; b]$ , то интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям, т.е.**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**4. Если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования, то знак интеграла изменится на противоположный:**

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**5. Если пределы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю:**

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

**6. Если  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a; b]$ , то**

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

**7. Если  $f(x) \geq \varphi(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , то**

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx$$

## 8. Теорема о среднем:

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то существует точка  $\xi \in [a; b]$  такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

С геометрической точки зрения теорема о среднем означает, что площадь криволинейной трапеции равновелика площади прямоугольника, основание которого совпадает с основанием трапеции ( $[a; b] \in OX$ ), а высота равна значению функции  $f(x)$  в некоторой точке  $\xi$  отрезка  $[a; b]$ .

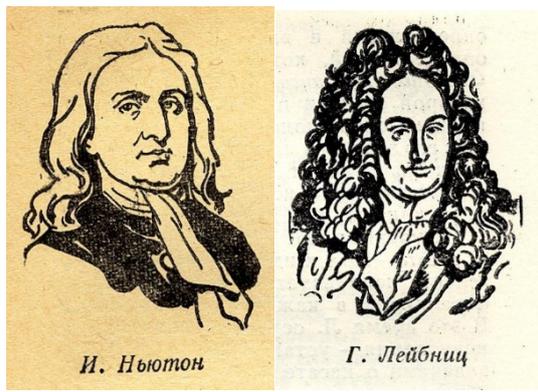
### Определение 1.

Величина:

$$M = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

называется средним значением функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

## §3 Формула Ньютона - Лейбница



Эта формула позволяет вычислять определенный интеграл, не прибегая к интегральным суммам.

Пусть  $F(x)$ - не которая первообразная функции  $f(x)$ . Известно, что две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное число, поэтому:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Для определения величины  $C$  Положим в последнем равенстве  $x = a$ , тогда

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C = 0,$$

следовательно,

$$C = -F(a).$$

**Поэтому:**

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$$

**и следовательно**

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

**В частности: при  $x = b$ , получим**

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

**или, в силу инвариантности интеграла, имеем:**

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)} - \text{формула Ньютона – Лейбница.}$$

**Определение 1. Определенный интеграл**

$$\int_a^b f(x) dx$$

равен приращению первообразной для подынтегральной функции на отрезке интегрирования  $[a;b]$ , т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Пример:**

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x \Big|_0^{0,5} = \\ &= \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

**Замечания:**

**1. Формула Ньютона - Лейбница** была выведена только для непрерывных функций.

**2. Подходы к интегрированию у Ньютона и Лейбница** были различные. Лейбниц развивал чистый анализ, исходя из

абстрактных понятий. Ньютон рассматривал математику только как способ для физических исследований. Название этой формулы до некоторой степени условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница именно такой формулы не было. Но они независимо друг от друга установили связь между дифференцированием и интегрированием. Лейбниц ввел обозначения:

$$dx ; d^2 x ; \int f(x) dx ; \frac{dy}{dx} .$$

## §4 Способы вычисления определённого интеграла

**1. Метод подстановки в определенном интеграле:**

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ где } f(x) \text{ - непрерывна на } [a; b].$$

Перейдем к новой переменной  $t$ , положив

$$x = \varphi(t); dx = \varphi'(t) dt .$$

Вычислим пределы интегрирования для новой функции:

$x$	$a$	$b$
$t$	$\alpha$	$\beta$

, где  $a = \varphi(\alpha)$ ;  $b = \varphi(\beta)$ , тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

**Пример:**

$$\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 3 & 8 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2 - 1) \cdot 2t dt}{t} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_2^3 (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = \\
&= 2 \left( \frac{3^2}{3} - 3 \right) - 2 \left( \frac{2^3}{3} - 2 \right) = 2 \cdot 6 - \frac{4}{3} = \\
&= \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

### **Замечания:**

Для осуществления такой замены необходимо, чтобы  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  были непрерывны на  $[\alpha; \beta]$ .

### **2. Интегрирование по частям в определенном интеграле.**

Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  непрерывны вместе со своими производными на отрезке  $[a; b]$ .

Рассмотрим дифференциал произведения этих функций:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v du(1), \text{ где}$$

$$dv = v'(x) dx; du = u'(x)$$

Проинтегрируем выражение (1) на отрезке  $[a; b]$

$$\int_a^b d(u \cdot v) = \int_a^b u \cdot dv + \int_a^b v \cdot du$$

$$u \cdot v \Big|_a^b = \int_a^b u \cdot dv + \int_a^b v \cdot du$$

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

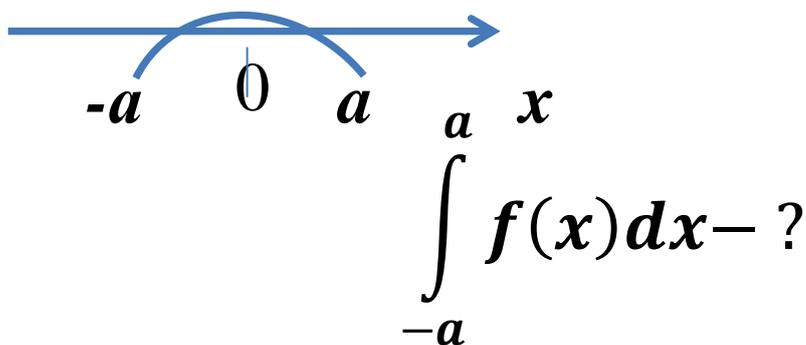
**Пример:**

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} x = u \\ dx = du \\ \cos dx = dv \\ \sin x = v \end{array} \right|$$
$$= x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} -$$

$$\begin{aligned}
 - \int_0^{\pi} \sin x dx &= \pi \cdot \sin \pi + \cos \Big|_0^{\pi} = \\
 &= \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2
 \end{aligned}$$

**Замечание.** В этой формуле следует помнить, что  $a$  и  $b$  – пределы изменения для независимой переменной  $x$ .

**3. Определённый интеграл на симметричном отрезке.**



$$\int_{-a}^a f(x) dx - ?$$

Используя свойства интеграла можно записать:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-a}^a f(x) dx \\
 &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u)(-du) =$$

$$= - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(-u) du$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -u \\ dx = -du \\ \frac{x}{u} \mid \frac{-a}{a} \mid \frac{0}{0} \end{array} \right| \text{В силу инвариантности}$$

интеграла получим:

$$\int_0^a f(-u) du = \int_0^a (-x) dx$$

Подставим полученное значение в выражение (1):

$$\int_{-a}^a f(x) dx$$

$$= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \text{ или}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int (f(-x) + f(x)) dx$$

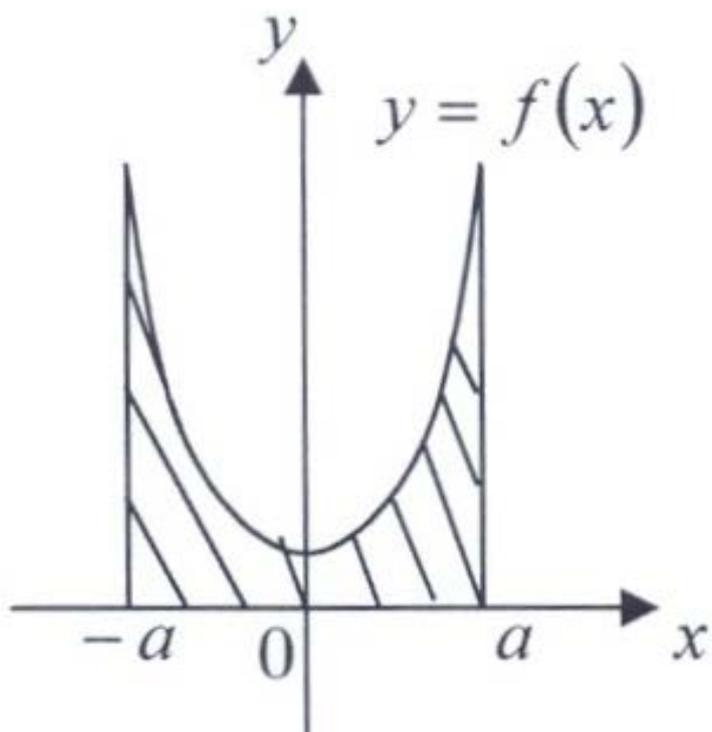
а) для четных функций:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

б) для нечетных функций:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

**С геометрической точки зрения определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции, следовательно, графически эта формула может быть изображена следующим образом:**



а) четная

б)

нечетная